**Escuela de Educación Secundaria Orientada N.º 209**

**Espacio curricular: MATEMÁTICA** **Curso: Segundo año "A"** **Turno: Mañana**

**Profesora: Noemí Mancini**

**TRABAJO PRÁCTICO N.º 1**

**Eje temático**: ¿Por qué es importante conocer a los ángulos?

**Objetivos** Reconocer los conceptos primitivos.

Graficar la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento.

Reconocer las diferentes clasificaciones de los ángulos.

Identificar los ángulos determinados por dos rectas y una transversal.

Plantear ecuaciones con los diferentes tipos de ángulos.

**Contenidos:** **Ángulos**

Conceptos primitivos de geometría. Definición de ángulo. Clasificación de ángulos. Bisectriz de un ángulo. Ángulos complementarios y suplementarios. Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice. Sistema sexagesimal de medición de ángulos. Ángulos determinados por dos rectas y una transversal. Ángulos determinados por dos rectas. Ángulos entre dos rectas paralelas y una transversal

**Actividades:**

Se le enviara al estudiante el material sobre el tema. Donde están incluidos los contenidos y las actividades.

En las clases presenciales se explicar el tema, aclarando las dudas.

El docente indicar cuales actividades se resolverá en durante la semana que el estudiante no asiste a la escuela.

**Evaluación:**

El estudiante cuando regrese a la escuela debe entregar las actividades asignada para ser evaluado.

La entrega puede ser en papel o al classrrom cuyo código es **23vnelg**

Al finalizar las actividades del trabajo práctico se realizará una actividad integradora para ser evaluado.

# TRABAJO PRÁCTICO N.º 1

## ÁNGULOS

### CONCEPTOS PRIMITIVOS DE GEOMETRÍA

- ✓ **PUNTO:** Según los Griegos es lo que no se puede dividir. No tiene dimensión.

Ejemplos: La marca que deja un lápiz afilado.

La cabeza de un alfiler.

El lugar donde se cruzan dos hilos.

Un grano de arena.

Se representa con una bolita rellena o una cruz.

Se nombra con letras minúscula.


- ✓ **RECTA:** Es una sucesión infinita de puntos, situado en una misma dirección. Tiene una sola dimensión: la longitud.
  Dos puntos determinan una recta.

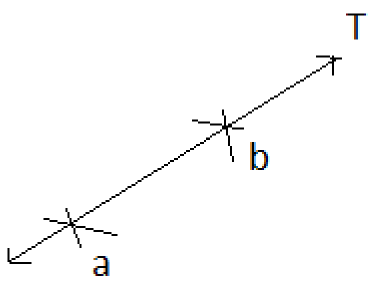
Ejemplos: Un hilo tenso, extendido.

Las intersecciones de las caras de una caja.

El borde de una hoja de carpeta.

Se simboliza con dos letras mayúsculas.

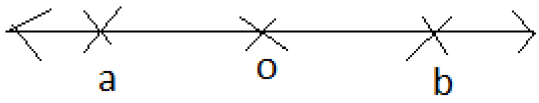
$$T = \overleftrightarrow{ab}$$




- ✓ **SEMIRRECTA:** Todo punto de una recta la divide en dos semirrectas. El punto mencionado es el origen de ambas.
  Toda semirrecta tiene principio, pero no fin.

$$\overrightarrow{ob} = semirrecta\ de\ origen\ o\ que\ contiene\ al\ punto\ b$$

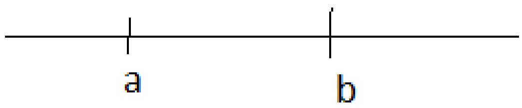
$$\overrightarrow{oa} = semirrecta\ de\ origen\ o\ que\ contiene\ al\ punto\ a$$




✓ **SEGMENTO:** Es la parte de una recta comprendida entre dos puntos.

Todo segmento tiene principio y fin

$$\overline{ab} = se\ lee\ segmento\ ab$$



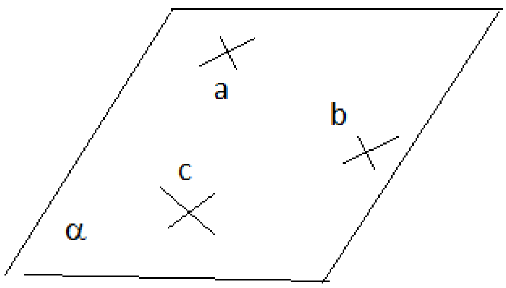

✓ **PLANOS:** Posee dos dimensiones.
Contiene infinitos puntos y rectas.
Tres puntos no alineados determinan un plano.
Una recta y un punto determinan un plano.
Dos rectas que se cortan determinan un plano.

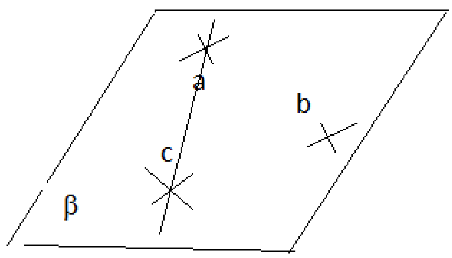
Ejemplos: Una hoja de carpeta.

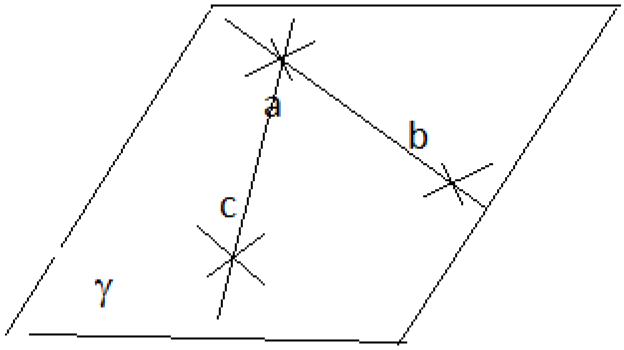
El piso de una casa.

La mesa

La pared del aula



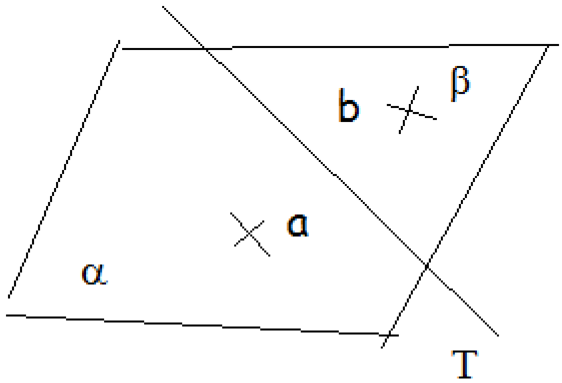






✓ **SEMIPLANO:** Toda recta perteneciente a un plano separa al mismo en dos porciones, cada una de ellos recibe el nombre de semiplano.
La recta que da lugar a los semiplanos se llama fronteras.

$$Spl\ (T, a) = semiplano\ respecto\ de\ la\ recta\ T\ que\ contiene\ al\ punto\ a$$

$$Spl\ (T, b) = semiplano\ respecto\ de\ la\ recta\ T\ que\ contiene\ al\ punto\ b$$

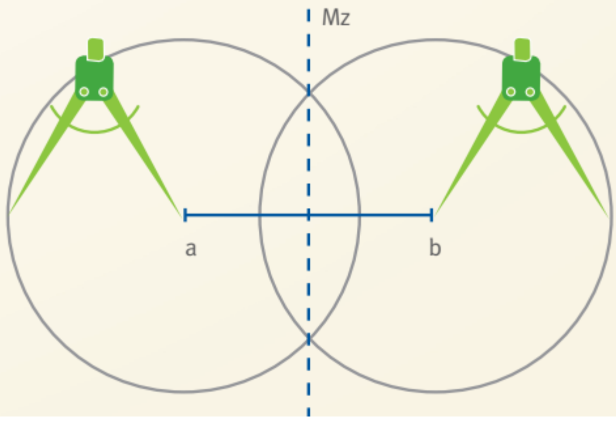


### Mediatriz de un segmento

La **mediatriz** de un segmento es la recta perpendicular que lo corta en su punto medio. Cada punto de la mediatriz equidista de los extremos del segmento.

Para trazar la mediatriz (Mz) de un segmento ab, se toma el compás con una abertura mayor que la mitad del segmento y, con centro en el punto *a*, se traza una circunferencia. Luego, sin modificar la abertura del compás, se repite el procedimiento con centro en el punto *b*.

Para finalizar, se dibuja la recta que pasa por las intersecciones de ambas circunferencias.




**ACTIVIDAD 1:**

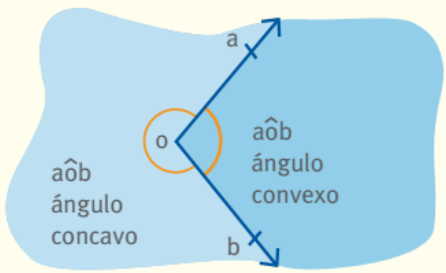
Antes de realiza la actividad lee con atención como se traza la mediatriz de un segmento.

a) Dibujar un segmento $\overline{ab} = 5\ cm$, luego trazar la mediatriz.
b) Dibujar un segmento $\overline{cd} = 8\ cm$, luego trazar la mediatriz.

**ANGULOS**

Un ángulo es la región del plano determinada por dos semirrectas que tienen el mismo origen. Para **nombrar un ángulo** se puede utilizar una de las siguientes formas:

- a$\hat{o}$b, se escribe el vértice en el medio;
- $\hat{o}$ se escribe solo el vértice;
- $\hat{\alpha}$ se escribe una letra griega.




**Clasificación de ángulos**

Un ángulo cuya amplitud esta entre $180° < \hat{\alpha} < 360°$ es **Cóncavo.**

Un ángulo cuya amplitud es igual a $\hat{\gamma} = 180°$ se denomina **Llano.**

Un ángulo cuya amplitud esta entre $90° < \hat{\alpha} < 180°$ se denomina **Obtuso.**

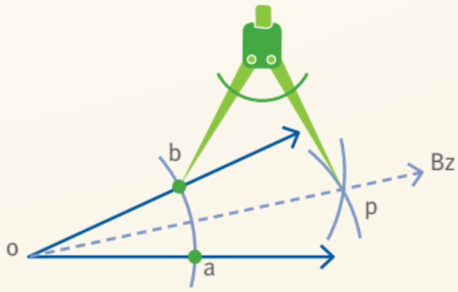
Un ángulo cuya amplitud es igual a $\hat{\beta} = 90°$se denomina **Recto.**

Un ángulo cuya amplitud esta entre $0° < \hat{\mu} < 90°$ se denomina **Agudo.**

Un ángulo cuya amplitud es igual a $\hat{\pi} = 0°$ se denomina **Nulo.**

## Bisectriz de un ángulo

Se denomina **bisectriz** de un ángulo a la semirrecta que lo divide en dos ángulos congruentes. Para trazar la bisectriz pueden seguir estos pasos:




1. Con centro en o, se traza un arco que corte a los dos lados del ángulo en los puntos *a* y *b*.
2. Con la misma abertura y con centro en *a* se traza un arco; luego con centro en *b* se traza otro arco que corte al anterior, por ejemplo, en *p*.
3. Se dibuja la semirrecta $\overrightarrow{op}$, que es la bisectriz (se escribe Bz).

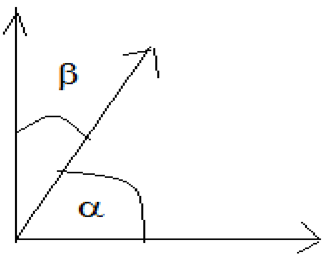
**ACTIVIDAD 2:**

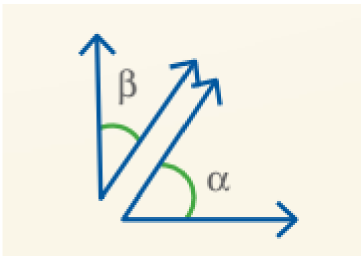
Antes de realiza está actividad lee con atención como se traza la bisectriz de un ángulo.

a) Dibuja en una hoja de carpeta un ángulo de $45°$, luego le traza la bisectriz.
b) Dibuja en una hoja de carpeta un ángulo de $140°$, luego le traza la bisectriz.

**ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS:**

Dos ángulos son complementarios si la suma de sus amplitudes es igual a $90°$




$$\hat{\alpha} \ y \ \hat{\beta} son \ complementarios \ porque \ \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$$

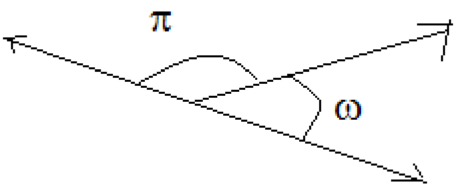
Si $\hat{\beta} = 35° \Rightarrow \hat{\alpha} = 90° - 35° = 55°$

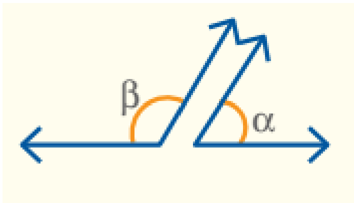
$$\hat{\beta} \ es \ el \ complemento \ de \ \hat{\alpha}$$

$$\hat{\alpha} \ es \ el \ complemento \ de \ \hat{\beta}$$

## ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus amplitudes es igual a $180°$




$$\hat{\alpha} \;\; y \;\; \hat{\beta} \;\; son\ suplementarios\ porque\ \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$$

$$\hat{\pi} + \hat{\omega} = 180\,°$$

Si $\hat{\pi} = 112° \;\; \Rightarrow \; \hat{\omega} = 180\,° - 112° = 68°$

$$\hat{\pi}\ es\ el\ suplemento\ de\ \hat{\omega}$$

$$\hat{\omega}\ es\ el\ suplemento\ de\ \hat{\pi}$$

## ACTIVIDAD 3:

Antes de realizar la actividad leer con atención la definición de ángulos complementarios y suplementarios.

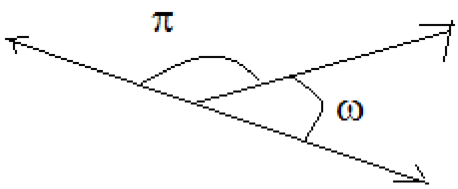
Dado los ángulos: $\hat{\alpha} = 37°, \quad \hat{\beta} = 53°, \quad \hat{\gamma} = 127°$

a) Calcular el complemento de $\hat{\alpha}$
b) Calcular el suplemento de $\hat{\beta}$
c) Calcular el suplemento de $\hat{\gamma}$

## Ejemplo 1:

**Hallar el valor equis y de cada uno de los siguientes ángulos:**

a) $\hat{\pi} = 9\,x - 20°$
$\hat{\omega} = 6\,x + 5$




Para resolver esta actividad debemos observar el dibujo.

Vemos que son dos ángulos suplementarios, entonces plantemos que:

$$\hat{\pi} + \hat{\omega} = 180\,°$$

Luego reemplazamos cada ángulo por su valor:

$$9x - 20° + 6\,x + 5° = 180°$$

Ahora se resuelve como una ecuación, para obtener el valor de equis:

Agrupamos los números con equis en un miembro, en el otro miembro los números sin equis.

$$9\,x + 6\,x = 180\,° + 20\,° - 5°$$

Ahora resolvemos.

$$15\,x = 195\,°$$

$$x = 195° \;:\; 15$$

$$x = 13\,°$$

Ahora se reemplaza la equis para obtener los valores de los ángulos:

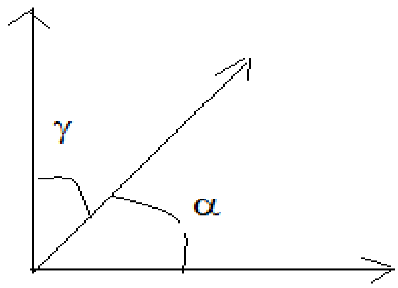
$$\hat{\pi} = 9\,*13° - 20° = 117\,° - 20° = 97°$$
$$\hat{\omega} = 6\,*13° + 5 = 78° + 5° = 83°$$

<u>**Ejemplo 2:**</u>

**Hallar el valor equis y de cada uno de los siguientes ángulos:**

$$\hat{\gamma} = 3\,x - 10°$$

$$\hat{\alpha} = x + 20°$$




Para resolver esta actividad debemos observar el dibujo.

Vemos que son dos ángulos complementarios, entonces plantemos que:

$$\hat{\gamma} + \hat{\alpha} = 90\,°$$

Luego reemplazamos cada ángulo por su valor:

$$3x - 10° + x + 20° = 90°$$

Ahora se resuelve como una ecuación, para obtener el valor de equis:

Agrupamos los números con equis en un miembro, en el otro miembro los números sin equis.

$$3\,x + x = 90\,° + 10\,° - 20°$$

Ahora resolvemos.

$$4\,x = 80\,°$$

$$x = 80° \;:\; 4$$

$$x = 20°$$

Ahora se reemplaza la equis para obtener los valores de los ángulos:

$$\hat{\gamma} = 3 \ * 20° - 10° = 60° - 10° = 50°$$

$$\hat{\alpha} = 20° + 20° = 40°$$

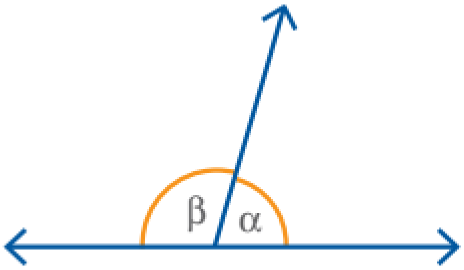
**ACTIVIDAD 4:**

**Calcular el valor de equis y el valor de los ángulos:**

**a.**

$\hat{\alpha} = 3x - 20°$

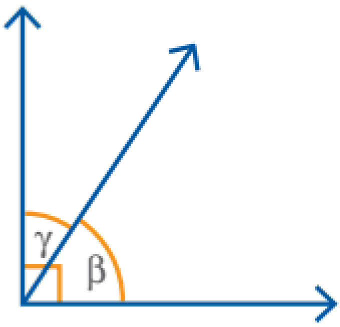
$\hat{\beta} = 2x + 40°$




b

$\hat{\gamma} = 3x$

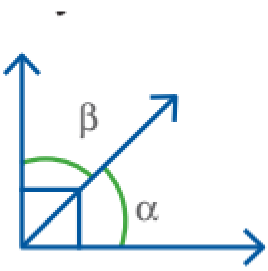
$\hat{\beta} = x + 38°$




c

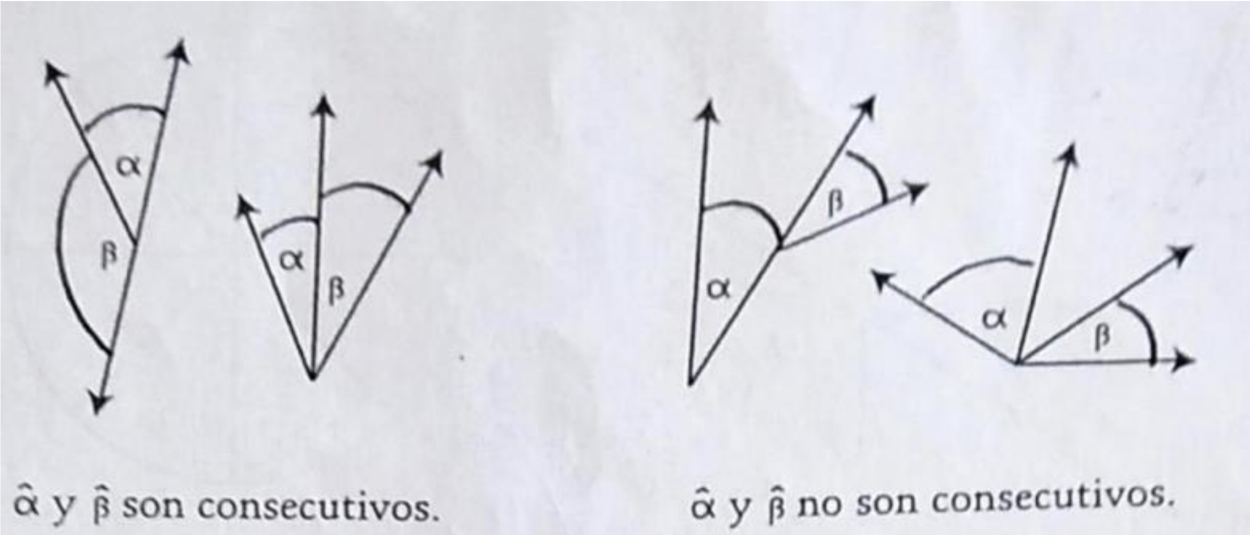
$\hat{\alpha} = x + 30°$

$\hat{\beta} = 2x$



**ÁNGULOS CONSECUTIVOS:**

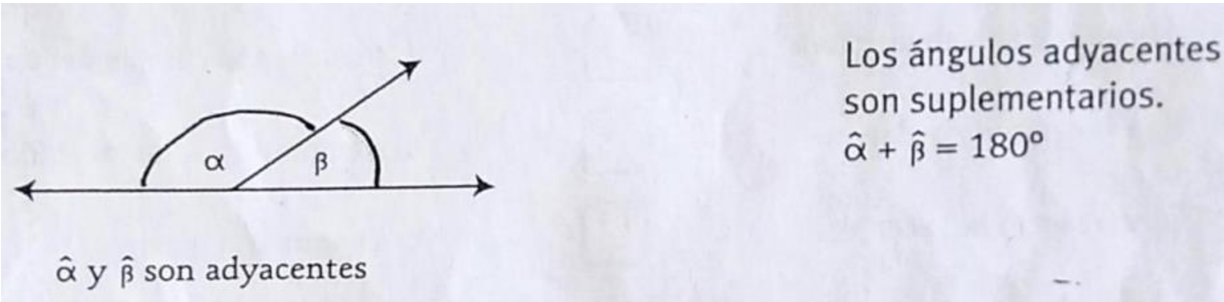
Los ángulos que tienen un lado y un vértice en común son **ángulos consecutivos**




**ÁNGULOS ADYACENTES:**

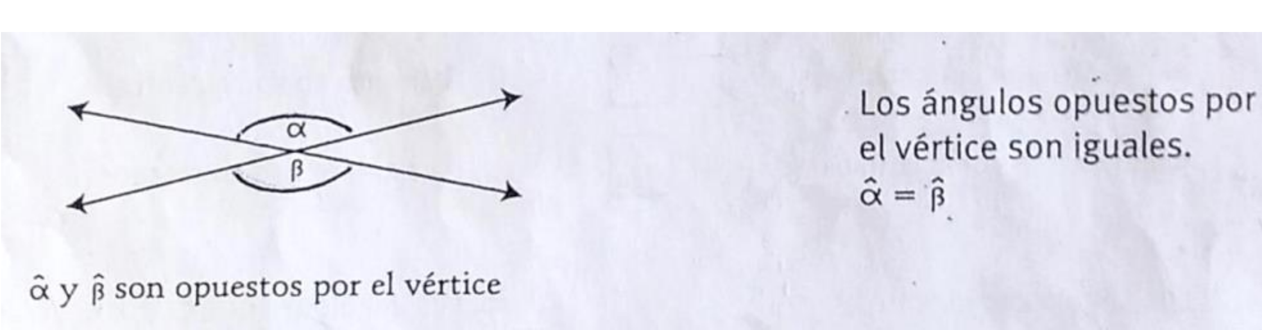
Se llaman ángulos **adyacentes** a todo par de ángulos que son consecutivos y suplementarios.

Los ángulos adyacentes tienen un lado en común y los otros dos lados son semirrectas opuestas.




**ÀNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE**

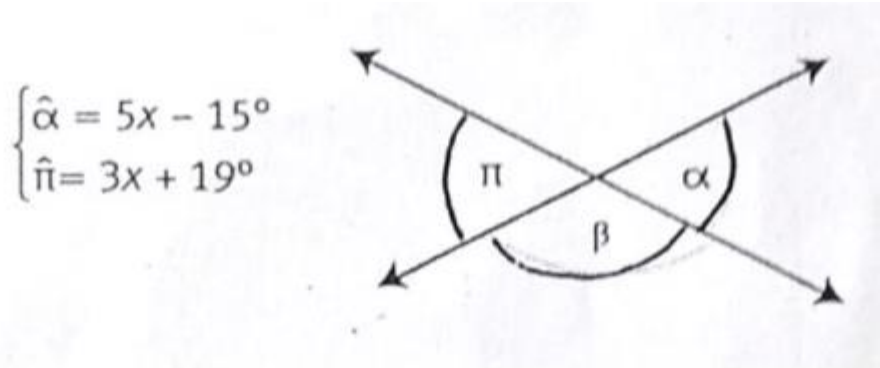
Se llaman ángulos **opuestos por el vértice** a todo par de ángulos que tienen el vértice en común y sus lados son semirrectas opuestas.



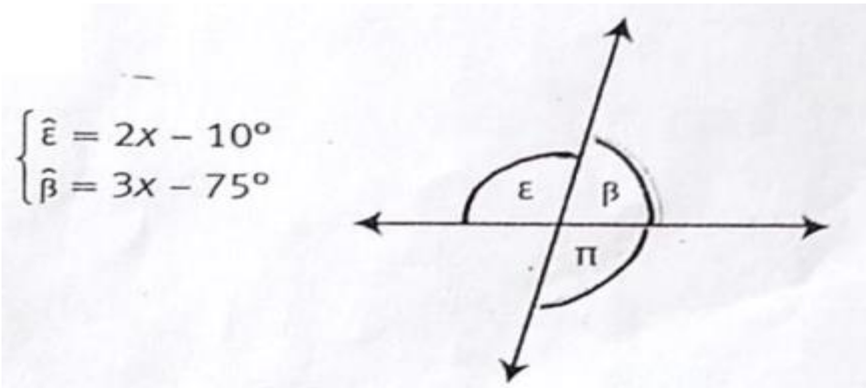
**ACTIVIDAD 5:**

**Plantear las ecuaciones, hallar el valor de equis y el valor de los ángulos.**

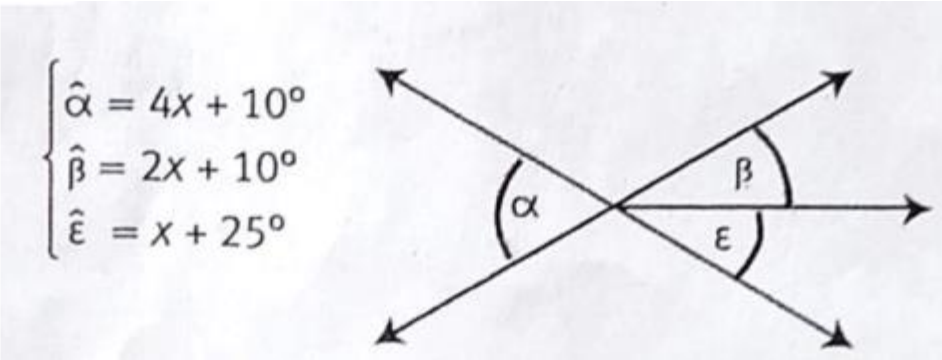
1) Ayudita para resolver este ejercicio.
   Primero observar que los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\pi}$ son opuestos por el vértice por lo tanto son iguales, entonces deben plantear la ecuación que $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$. Luego reemplaza por los datos. Después que averiguaste el valor de la equis, la reemplaza en los ángulos, así obtener los valores de los ángulos.
   Segundo compara los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ que son adyacentes.
   Plantea que $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$. Luego calcular el valor de $\hat{\beta}$.



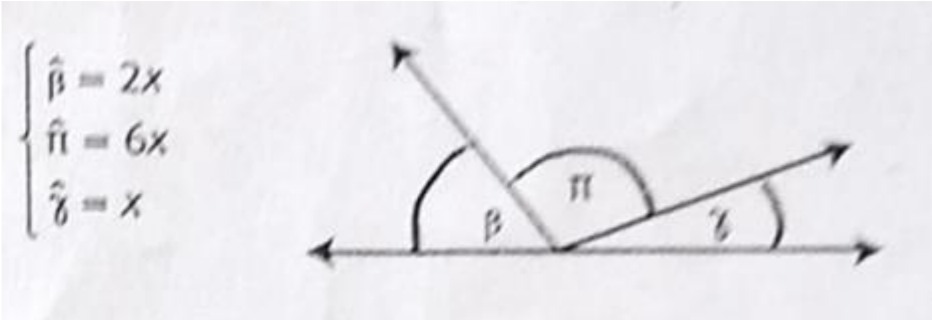

2) Ayudita para resolver este ejercicio.
   Primero observar que los ángulos $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\beta}$ son adyacentes por lo tanto son suplementarios, deben plantear la ecuación que $\hat{\alpha} + \hat{\pi} = 180°$. Luego reemplaza por los datos. Después que averiguaste el valor de la equis, la reemplaza en los ángulos, así obtener los valores de los ángulos.
   Segundo compara los ángulos $\hat{\epsilon}$ y $\hat{\pi}$ son opuestos por el vértice, son iguales.



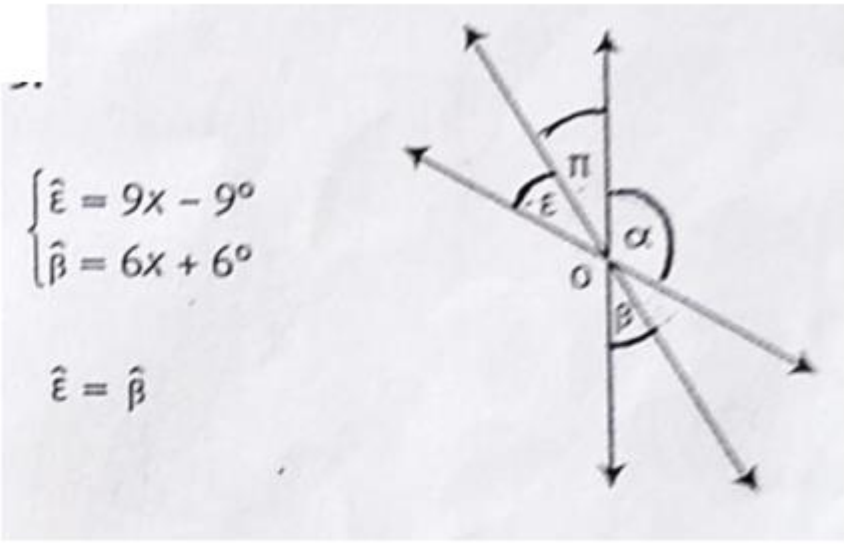

3) Ayudita para resolver este ejercicio.
   Primero observar que los ángulos $\hat{\epsilon} + \hat{\beta}\ \ y\ \ \hat{\alpha}$ son opuestos por el vértice, por lo tanto, son iguales, deben plantear la ecuación que $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\varepsilon}$. Luego reemplaza por los datos. Después que averiguaste el valor de la equis, la reemplaza en los ángulos, así obtener los valores de los ángulos.




4)




5) Ayudita:
   Plantear que $\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}$. Averiguar el valor de equis y el valor de los ángulos.
   Después plantear que $\hat{\pi} = \hat{\beta}$ porque son opuestos por el vértice.
   Por último, plantear que $\hat{\varepsilon} + \hat{\pi} + \hat{\alpha} = 180°$ porque son adyacentes.




**<u>SISTEMA SEXAGESIMAL DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS</u>**

<u>Teoría:</u>

Para la medición de ángulos, se utiliza el sistema sexagesimal, en el cual un giro completo está dividido en 360 partes iguales (grado), cada grado está dividido en 60 partes iguales (minutos) y cada minuto en otras 60 partes iguales (segundos)

$$1\ giro = 360°$$

$$1° = 60\ '$$

$$1' = 60\ ''$$

$$1° = 60' = 3600\ ''$$

A continuación, se ejemplifican las operaciones en el sistema sexagesimal de medición de ángulos.

**Adición**

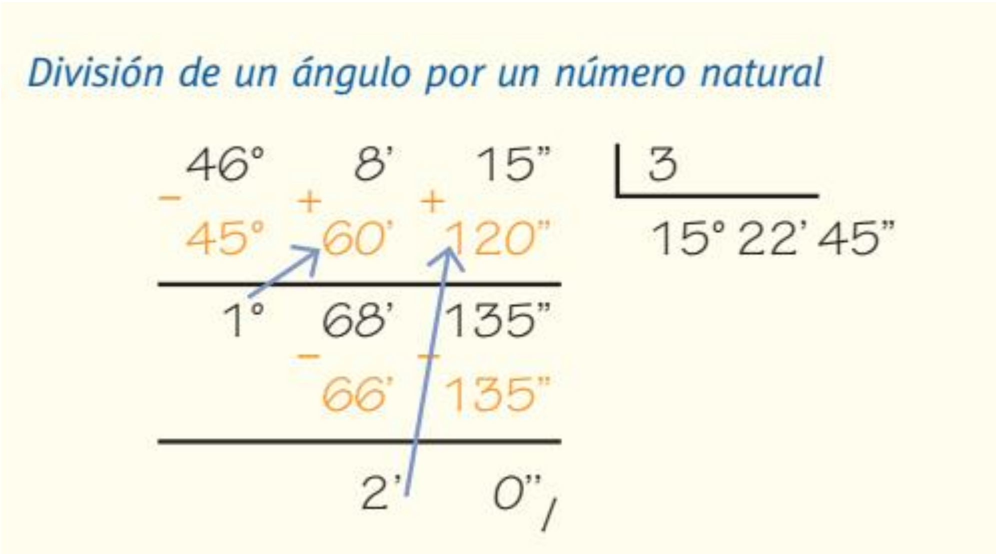
$$\begin{array}{rrrr}
 & 43° & 38' & 45'' \\
+ & 5° & 24' & 32'' \\
\hline
 & 48° & 62' & 77'' \\
 & & +\ 1' & \leftarrow -\ 60'' \\
\hline
 & 48° & 63' & 17'' \\
+ & 1° & \leftarrow -\ 60' & \\
\hline
 & 49° & 3' & 17''
\end{array}$$

**Sustracción**

$$\begin{array}{rrrr}
 & 34° & 59' & \\
 & \cancel{35°} & \cancel{60'} & 60'' \\
- & 19° & 21' & 18'' \\
\hline
 & 15° & 38' & 42'
\end{array}$$

**Multiplicación de un ángulo por un número natural**

$$\begin{array}{rrrr}
 & 31° & 15' & 4'' \\
 & & & \cdot\ 4 \\
\hline
 & 124° & 60' & 16'' \\
+ & 1° & -\ 60' & \\
\hline
 & 125° & 0' & 16''
\end{array}$$




**<u>ACTIVIDAD 6:</u>**

**Sean $\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{43° \; 54' \; 25''}$ y $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{38° \;\; 37' \;\; 48\,''}$**

Calcular: a) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} =$

b) $\hat{\alpha} - \hat{\beta} =$

**<u>ACTIVIDAD 7:</u>**

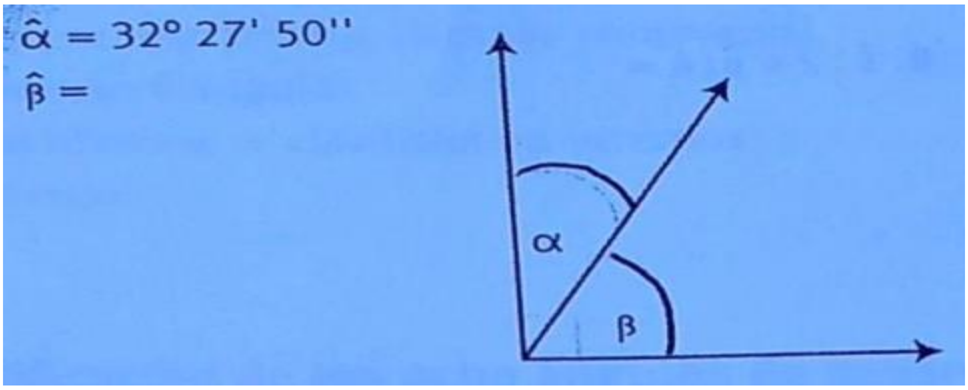
**Resolver cada una de las siguientes operaciones**

a) $47\,° \;\; 52' \; 39'' \;+\;\; 85° \;\; 24' \; 45'' =$
b) $95° \;\; 12' \; 21'' - \;\; 53° \;\; 50' \; 28'' =$
c) $26° \;\; 14' \; 30'' + \;\; 57° \;\; 50' \; 9'' =$
d) $126° \;\; 14' \; 30'' - \;\; 57° \;\; 50' \; 9'' =$
e) $26° \;\; 14' \; 30'' \;\; * \;\; 4 =$
f) $5° \;\; 13' \; 15'' \;\; * \;\; 8 =$
g) $55° \;\; 20' \; 15'' \;\; : \;\; 3 =$
h) $124° \;\; 31' \; 34'' \; : \; 5 =$

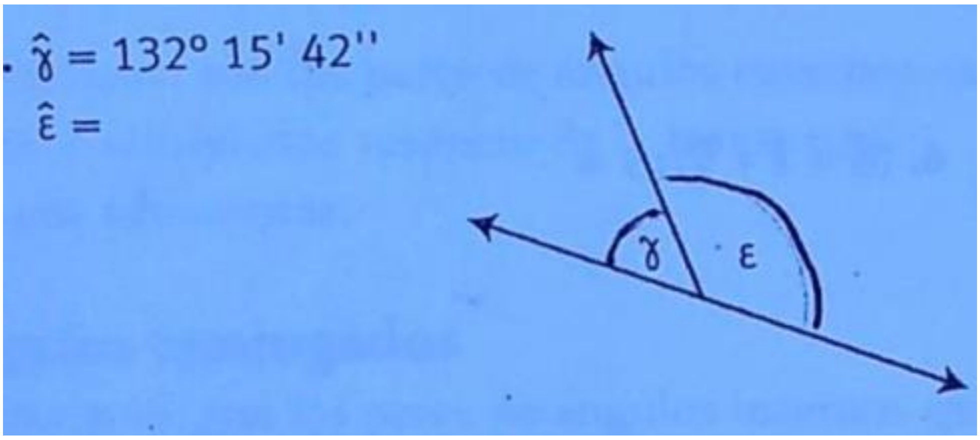
**ACTIVIDAD 8:**

**Hallar el valor de cada uno de los siguientes ángulos.**

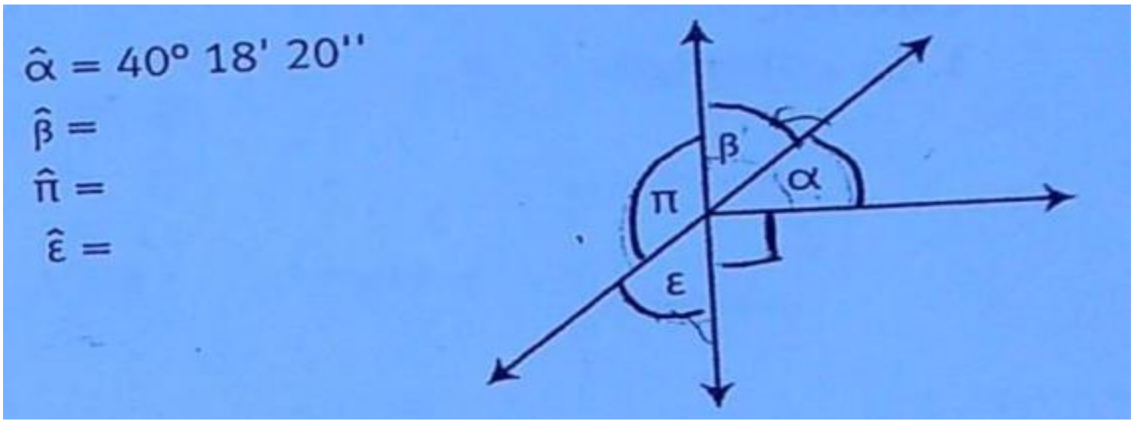
a)



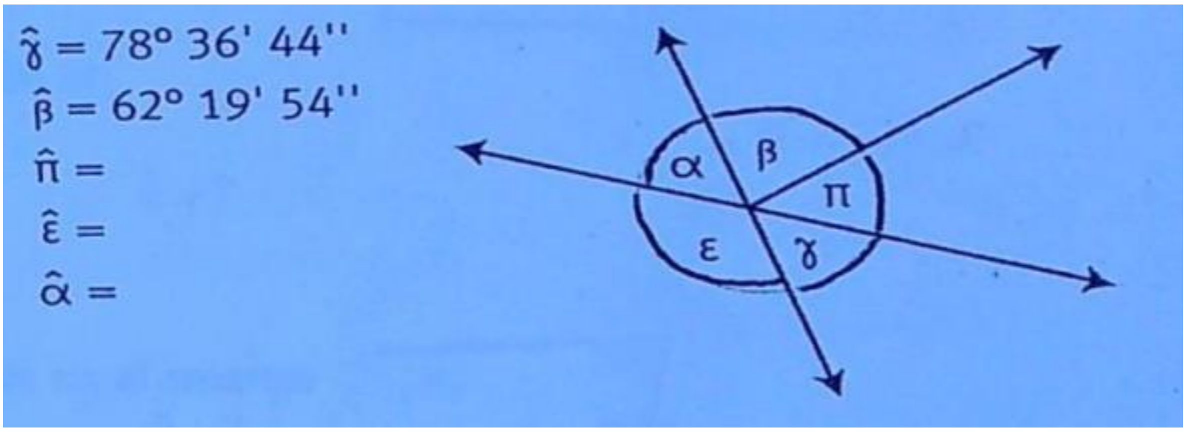

b)




c)



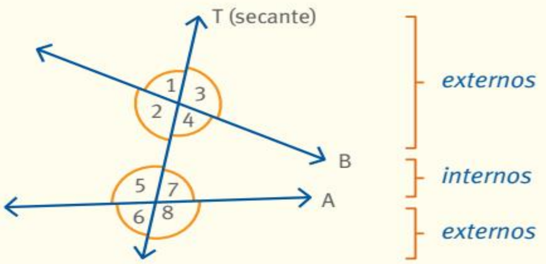
d)




## <u>ÁNGULOS DETERMINADOS POR DOS RECTAS Y UNA TRANSVERSAL</u>

Los ángulos determinados por dos rectas y una transversal (es la recta que las interseca) se pueden clasificar de la siguiente forma.

- Ángulos **correspondientes**: son los pares de ángulos no adyacentes que están en el mismo semiplano respecto de la secante, siendo uno interno y otro externo.
- Ángulos **alternos**: son los pares de ángulos (internos o externos) no adyacentes que están en distintos semiplanos respecto de la secante.
- Ángulos **conjugados**: son los pares de ángulos (internos o externos) que están en el mismo semiplano respecto de la secante.



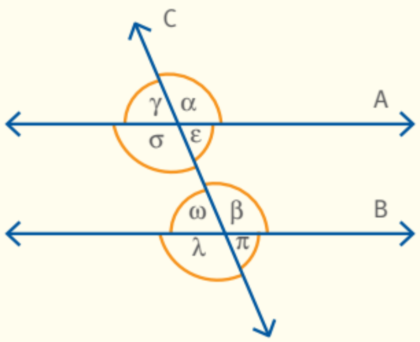

*La recta T es secante porque interseca a A y B; T divide el plano en dos semiplanos.*

Por ejemplo:

$\hat{7}$ y $\hat{3}$ son correspondientes.
$\hat{4}$ y $\hat{5}$ son alternos internos.
$\hat{3}$ y $\hat{6}$ son alternos externos.
$\hat{2}$ y $\hat{5}$ son conjugados internos.
$\hat{1}$ y $\hat{6}$ son conjugados externos.

Si las rectas A y B son paralelas, se cumplen las siguientes propiedades:

- Los ángulos correspondientes son congruentes.
- Los ángulos alternos son congruentes.
- Los ángulos conjugados son suplementarios.




*A // B y C transversal*

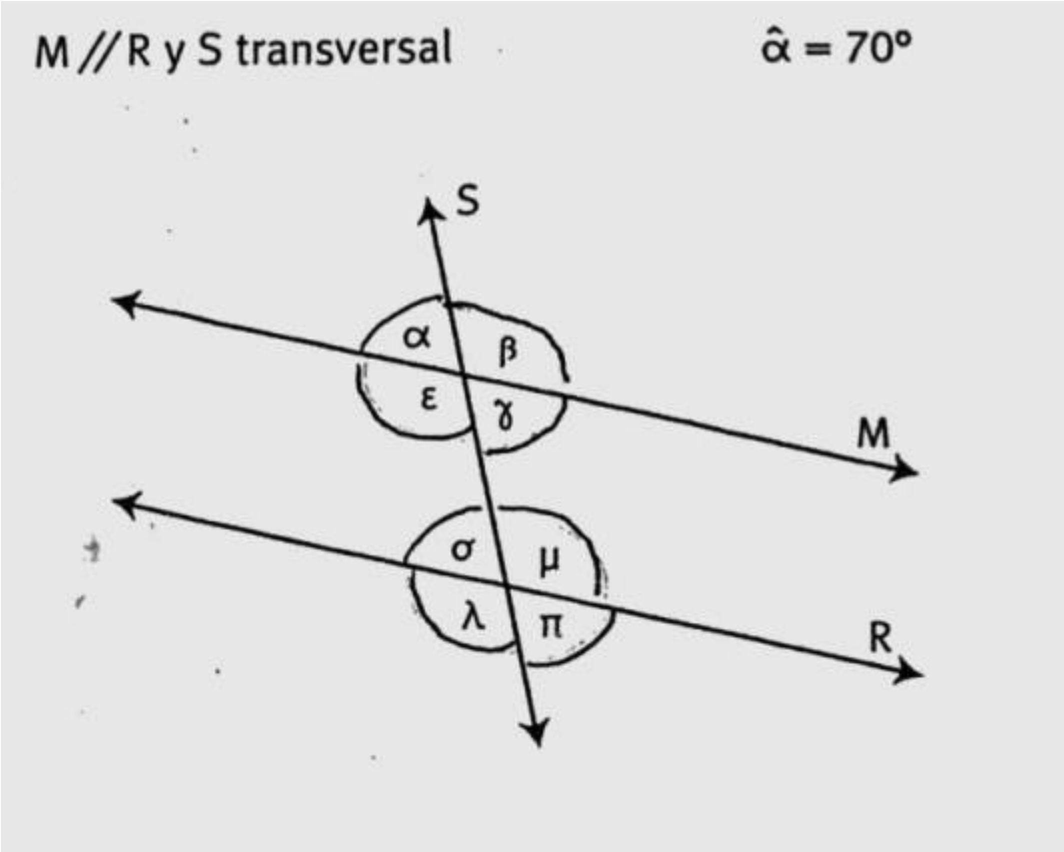
Por ejemplo:

$\hat{\varepsilon} = \hat{\pi}$ por ser correspondientes.
$\hat{\gamma} = \hat{\pi}$ por ser alternos externos.
$\hat{\varepsilon} = \hat{\omega}$ por ser alternos internos.
$\hat{\sigma} + \hat{\omega} = 180°$ por ser conjugados internos.
$\hat{\alpha} + \hat{\pi} = 180°$ por ser conjugados externos.

**ACTIVIDAD 9:**

Calcular el valor de cada uno de los siguientes ángulos, justificando la respuesta.

a)




Este ejercicio se resuelve de la siguiente forma:

Tenemos como dato que $\hat{\alpha} = 70°$, debemos comparar cada ángulo con $\hat{\alpha}$.

Los ángulos son $\hat{\alpha} = \hat{\gamma}$ porque son opuestos por el vértice su valor es $\hat{\gamma} = 70°$.

Los ángulos $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\beta}$ son adyacentes, entonces debemos plantear:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$$

$$70° + \hat{\beta} = 180°$$

$$\hat{\beta} = 180° - 70° = 110°$$

Los ángulos $\widehat{\beta}\ \ y\ \hat{\varepsilon}$ son opuestos por el vértice, por lo tanto son iguales.

$$\hat{\beta} = \hat{\epsilon} = 110°$$

Los ángulos $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\pi}$ son alternos externos, estos son iguales:

$$\hat{\alpha} = \hat{\pi} = 70°$$

Los ángulos $\hat{\alpha}\ y\ \hat{\sigma}$ son correspondientes, estos son iguales:

$$\hat{\alpha} = \hat{\sigma} = 70°$$

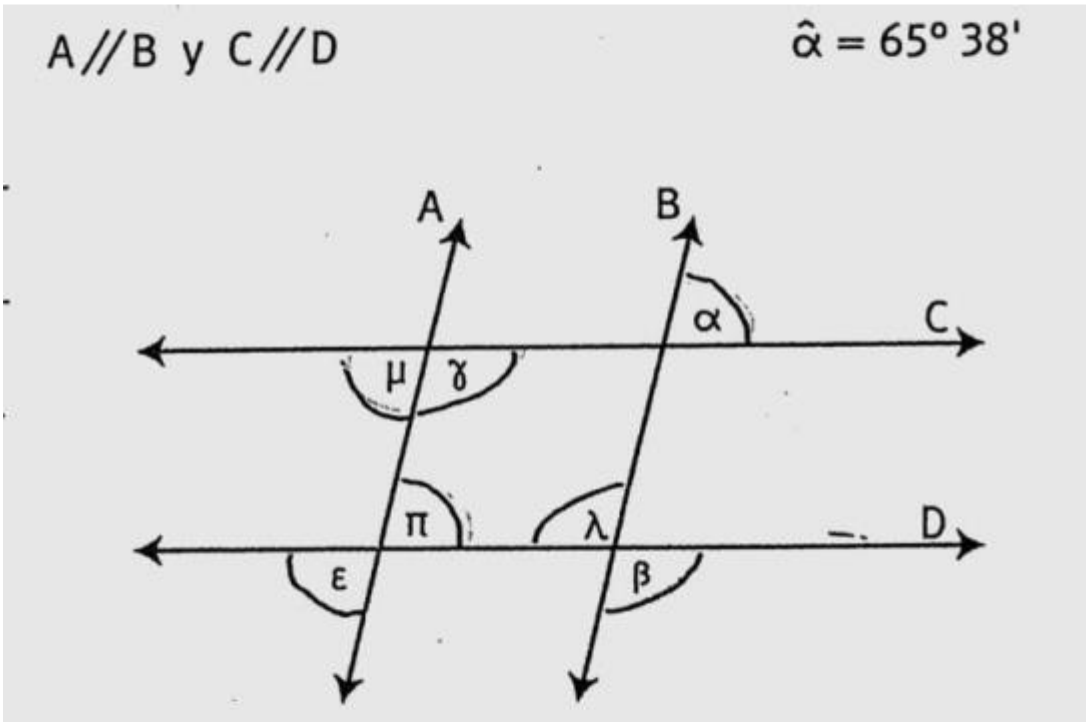
Los ángulos $\hat{\beta}$ $y$ $\hat{\mu}$ son correspondientes, estos son iguales:

$$\hat{\beta} = \hat{\mu} = 110°$$

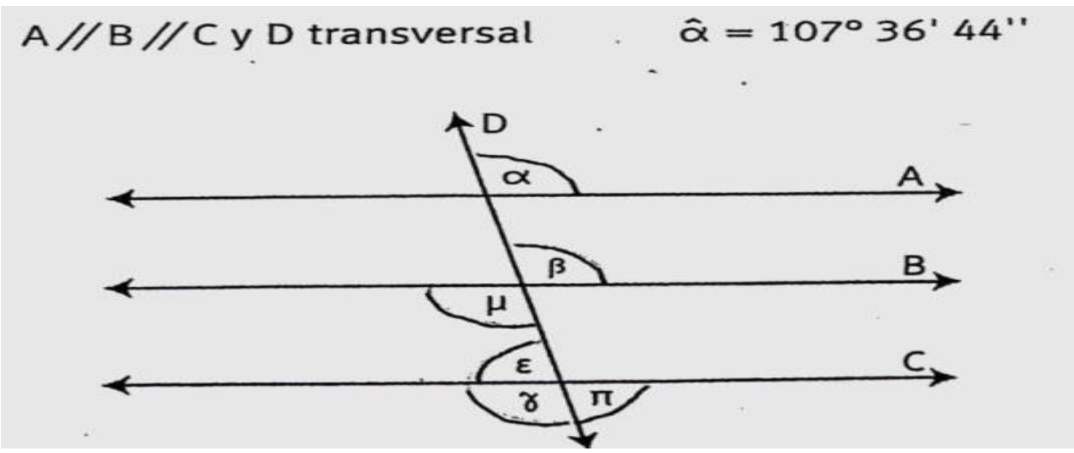
Los ángulos $\widehat{\mu}$ $y$ $\hat{\lambda}$ son opuestos por el vértice, por lo tanto, son iguales.

$$\hat{\mu} = \hat{\lambda} = 110°$$

b)




c)



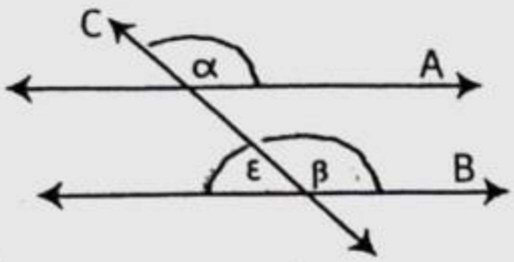
## ACTIVIDAD 10:

**Plantear la ecuación, calcular el valor de equis y de los ángulos que se indican.**

a)

$A // B$

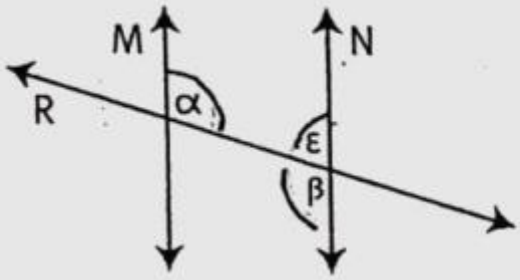
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 3x + 10^\circ \\ \hat{\beta} = 5x - 50^\circ \end{cases}$$




b)

$M // N$

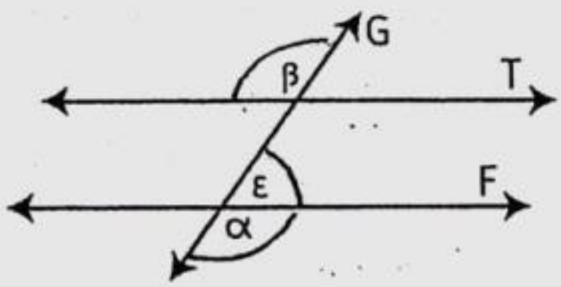
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 2x + 20^\circ \\ \hat{\varepsilon} = 3x - 40^\circ \end{cases}$$




c)

$T // F$

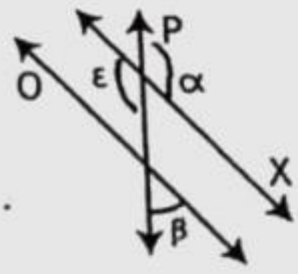
$$\begin{cases} \hat{\beta} = 4x + 12^\circ \\ \hat{\alpha} = 3x + 40^\circ \end{cases}$$




d)

$X // O$

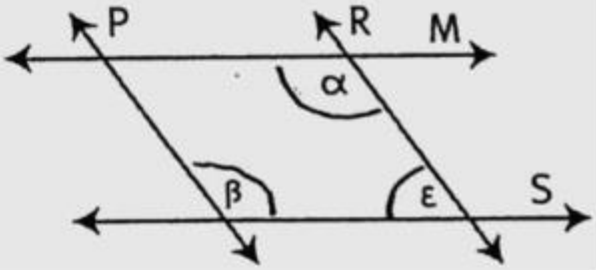
$$\begin{cases} \hat{\alpha} = 5x + 50^\circ \\ \hat{\beta} = 7x - 14^\circ \end{cases}$$



e)

$P // R$ y $N // S$

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = x + 30^\circ \\ \hat{\varepsilon} = 2x - 60^\circ \end{cases}$$




f)

$E // P // T$

$$\begin{cases} \hat{\beta} = 6x + 34^\circ \\ \hat{\alpha} = 8x + 12^\circ \end{cases}$$